



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

### g) Pertes et absorption

Au lieu de

$$\begin{cases} \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

on a en présence de pertes Joules ( $R \neq 0 \Omega/m$ ) et diélectriques ( $G \neq 0 S/m$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\left(R + L \frac{\partial}{\partial t}\right) I(z,t) \\ \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) V(z,t) \end{cases} \quad R \neq 0, G \neq 0$$

### C63 - Solutions en présence de pertes

phaseurs  $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{dV}{dz} = (R + j\omega L) I \\ -\frac{dI}{dz} = (G + j\omega C) V \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dz^2} = \gamma^2 V$

avec  $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$

nouveau

↙ constante d'atténuation [Np/m]

↘ constante de propagation [rad/m]

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} \\ I(z) = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}) \end{cases} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{Ⓢ!}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Ligne infinie:  $V^- = 0$ ,  $V^+ > 0$

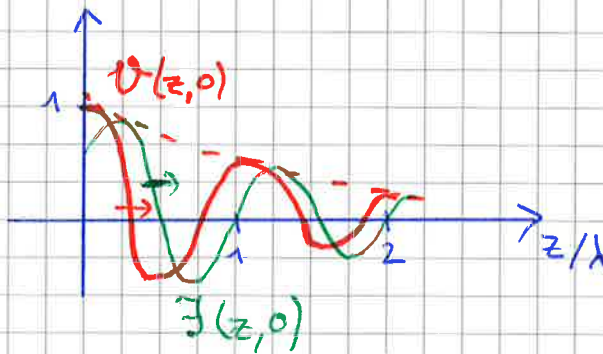
$$\Rightarrow \begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\gamma z} & = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z} & = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(z,t) = \operatorname{Re} \{ V e^{j\omega t} \} = V^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$I(z,t) = \operatorname{Re} \{ I e^{j\omega t} \} = \frac{V^+}{|Z_0|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \phi_z)$$

↑ les pertes  
atténuent  
exponentiellement  
les ondes.

↑ les pertes déphasent  
 $V$  et  $I$



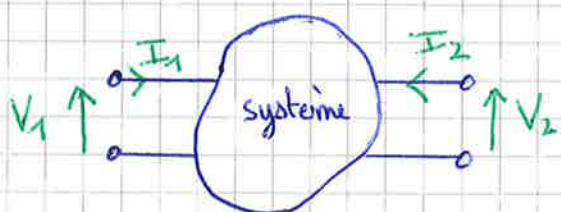


ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# 1) Systèmes à deux ports : paramètres S, Z et M

ports = terminaux électriques par lesquels l'énergie peut entrer ou sortir du système

## C64 - Système à deux ports

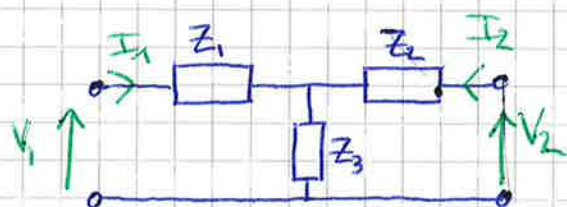


$V, I$  phasors complexes

système invariant dans le temps et linéaire

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } Z$$

## C65 - Exercice



$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{I_2} \frac{V_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = (Z_2 + Z_3) \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = Z_3$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{I_1} \frac{V_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} = (Z_1 + Z_3) \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = Z_3$$





ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Autres définitions:

\*  $V_i = V_i^+ + V_i^-$  (séparation en ondes incidentes et réfléchies)

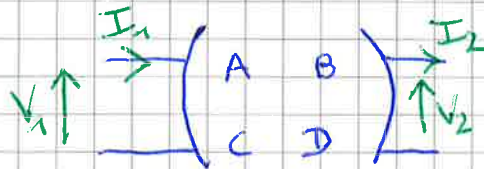
$$\begin{pmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{reflection 1} & \text{transmission 2} \rightarrow 1 \\ \downarrow & \swarrow \\ S_{11} & S_{12} \\ \uparrow & \searrow \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}$

matrice  
de diffusion  
= paramètres S

$$* \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

CGG - Matrice ABCD



matrice M ou ABCD

= paramètres M

⚠ Convention de signe de  $I_2$  changée par rapport à Z.



$$M_2 \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 M_2 \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

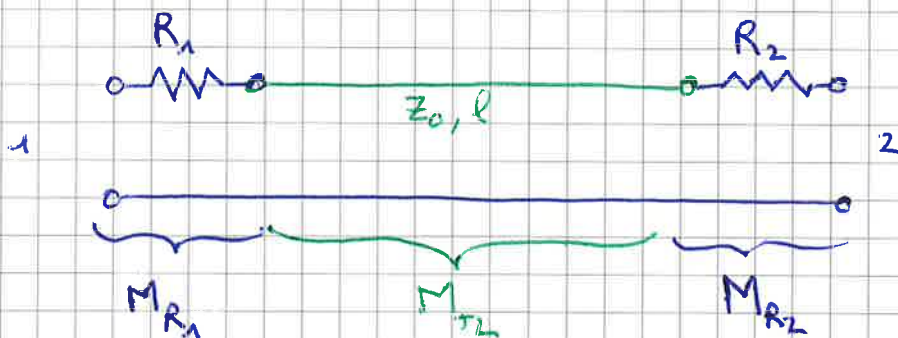
$$M_{eq} = M_1 M_2$$

⚠ importance de l'ordre!



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

### (67 - Exemple



$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{TL} = \begin{pmatrix} \cos x & j Z_0 \sin x \\ j \frac{\sin x}{Z_0} & \cos x \end{pmatrix} \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = \beta l$

$$M_{tot} = M_{R_1} M_{TL} M_{R_2}$$

$$M_{TL} M_{R_2} = \begin{pmatrix} \cos x & R_2 \cos x + j Z_0 \sin x \\ j \frac{\sin x}{Z_0} & j \frac{R_2}{Z_0} \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$M_{tot} = \begin{pmatrix} \cos x + j \frac{R_1}{Z_0} \sin x & (R_1 + R_2) \cos x + j \sin x (Z_0 + \frac{R_1 R_2}{Z_0}) \\ j \frac{\sin x}{Z_0} & j \frac{R_2}{Z_0} \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

A ← (top-left element)  
B ← (top-right element)  
C ← (bottom-left element)  
D ← (bottom-right element)

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) \cos x + j \sin x (Z_0 + \frac{R_1 R_2}{Z_0}) \\ j \frac{R_2}{Z_0} \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{A + \frac{B}{Z_0} - (Z_0 + D)}{A + \frac{B}{Z_0} + (Z_0 + D)}$$

$$S_{22} = \frac{-A + B/Z_0 - (Z_0 + D)}{A + B/Z_0 + (Z_0 + D)}$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{2}{A + B/Z_0 + (Z_0 + D)}$$